FRAÇÕES CONTINUADAS COMO AS MELHORES APROXIMAÇÕES RACIONAIS

FERNANDO FERREIRA

A fração continuada de π é $[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, \ldots]$, prosseguindo sem regra simples. Podemos agora calcular os primeiros convergentes de π: são 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{103993}{33102}$, etc. Estes convergentes são, num sentido a precisar, as melhores aproximações racionais de π. Tomemos como exemplo o convergente $\frac{355}{113}$. Se tivermos um número racional $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$, com o denominador b não excedendo 113, então tem-se necessariamente

$$\left|\pi - \frac{355}{113}\right| \leqslant \left|\pi - \frac{a}{b}\right|.$$

Dito de outro modo, não é possível melhorar a exatidão da aproximação de $\frac{355}{113}$ a π sem aumentar o denominador. Este resultado é um caso particular do seguinte teorema:

Teorema. *Seja θ um número irracional e $\frac{p_n}{q_n}$ o n-ésimo convergente de π $(n > 0)$. Se se tiver*

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| < \left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right|$$

$(a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N})$, então $b > q_n$.

Para demonstrar este teorema, vamos mostrar algo mais forte:

Lema 1. *Seja θ um número irracional e $\frac{p_n}{q_n}$ o n-ésimo convergente de θ $(n > 0)$. Então*

$$|b\theta - a| < |q_n\theta - p_n| \quad \Rightarrow \quad b \geqslant q_{n+1}.$$

O teorema é uma consequência simples do lema. Com efeito, suponhamos por absurdo que $\left|\theta - \frac{a}{b}\right| < \left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right|$, mas $b \leqslant q_n$. Ter-se-ia $q_n|b\theta - a| < b|q_n\theta - p_n|$ e, portanto,

$$|b\theta - a| < \frac{b}{q_n}|q_n\theta - p_n| \leqslant |q_n\theta - p_n|.$$

Aplicando o lema, viria $b \geqslant q_{n+1}$. Logo, como $q_{n+1} > q_n$, ter-se-ia $b > q_n$, o que contradiz a nossa suposição.

Antes de prosseguir com a demonstração do lema, deve-se notar que $\frac{355}{113}$ é uma aproximação particularmente boa de π. Isto deve-se ao facto (visto numa demonstração duma secção anterior) de que $|\pi - \frac{335}{113}| \leqslant \frac{1}{q_3 q_4}$. Neste caso, q_4 é particularmente grande (é 33102) quando comparado com q_3 (que é, obviamente, 113). Vem que $\frac{335}{113}$ difere de π a menos de um 3740526 avos.

Demonstração do lema. Vamos ver que se $0 < b < q_{n+1}$, então $|b\theta - a| \geqslant |q_n\theta - p_n|$. Tomem-se inteiros u e v tais que $a = up_n + vp_{n+1}$ e $b = uq_n + vq_{n+1}$.

Tais números inteiros existem porque a equação linear

$$\begin{bmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

é possível e determinado, pois

$$\det \begin{bmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{bmatrix} = p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = (-1)^{n+1} \neq 0.$$

A solução é mesmo *inteira* porque o determinante é $(-1)^{n+1}$. Basta obervar que

$$\begin{bmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1}} \begin{bmatrix} q_{n+1} & -p_{n+1} \\ -q_n & p_n \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{(-1)^{n+1}} \begin{bmatrix} q_{n+1} & -p_{n+1} \\ -q_n & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Voltemos à demonstração. Note-se que $u \neq 0$. Caso contrário, $b = vq_{n+1} \geqslant q_{n+1}$. Tem-se:

$$|b\theta - a| = |(uq_n + vq_{n+1})\theta - (up_n + vp_{n+1})| = |u(q_n\theta - p_n) + v(q_{n+1}\theta - p_{n+1})|.$$

Se $v = 0$, sai imediatamente $|b\theta - a| = |u(q_n\theta - p_n)| \geqslant |q_n\theta - p_n|$. Se $v \neq 0$, pode argumentar-se que u e v têm sinais opostos. Com efeito, dado que o número positivo b é $uq_n + vq_{n+1}$, não se pode dar o caso de u e v serem ambos negativos. Também não podem ser ambos positivos porque senão viria $b = uq_n + vq_{n+1} > vq_{n+1} \geqslant q_{n+1}$.

Como sabemos, os convergentes oscilam entre serem menores e maiores do que o seu limite θ. Dito de outra maneira, ou se tem $\frac{p_n}{q_n} < \theta < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ ou se tem $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \theta < \frac{p_n}{q_n}$. Em qualquer dos casos, conclui-se que os valores de $q_n\theta - p_n$ e $q_{n+1}\theta - p_{n+1}$ têm sinais opostos.

Uma simples discussão (por casos) de sinais permite agora concluir que os valores $u(q_n\theta - p_n)$ e $v(q_{n+1}\theta - p_{n+1})$ têm o mesmo sinal. Logo:

$$|b\theta - a| = |u(q_n\theta - p_n) + v(q_{n+1}\theta - p_{n+1})| = |u(q_n\theta - p_n)| + |v(q_{n+1}\theta - p_{n+1})| > |u(q_n\theta - p_n)| \geqslant |q_n\theta - p_n|.$$

Como se queria. $\square$